**ВЕТРОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ВОДОЕМЕ: АНАЛИЗ МОДЕЛИ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ**

Турдушев И.А.

Тел. 0 555 63 91 44; e-mail: [iliar.turdushev@gmail.com](mailto:iliar.turdushev@gmail.com)

Кыргызско-Российский Славянский Университет, Бишкек, Кыргызстан.

Математическая модель ветровых течений жидкости в водоеме основана на системе полных нелинейных уравнений гидротермодинамики**,** записанных в традиционных приближениях, и включает уравнения движения, статики, неразрывности, переноса тепла, а также уравнение состояния [1]. Полная реализация подобной модели возможна только численными методами. В некоторых случаях учет специфики водоема позволяет упростить общую модель, сохраняя ее достаточно сложной, чтобы отражать основные свойства изучаемых течений, но, в то же время, сделав ее достаточно простой, чтобы можно было отыскать некоторые классы аналитических решений этой задачи. Изучение таких решений, с одной стороны, позволяет, в первом приближении, оценить качественную картину течений, а с другой стороны, аналитические решения играют важную роль при проверке работоспособности вычислительных методов и алгоритмов, используемых для численной реализации общей модели. Впервые такая упрощенная модель была предложена Экманом, им же были найдены первые аналитические решения [2]. В дальнейшем различные классы аналитических решений для ветровых экмановских моделей были найдены многими авторами, их можно найти, например, в [3].

Рассматриваемая математическая модель включает уравнения движения





и уравнение неразрывности несжимаемой жидкости



где .

Уравнения – рассматриваются в трехмерной области

,

где  – двумерная область, расположенная в плоскости  (зеркало водоема); функция  описывает рельеф дна; и дополняются следующими граничными







и начальными условиями



В модели - приняты обозначения:  – компоненты вектора скорости течений, соответствующие осям ;  – давление;  - давление на невозмущенной поверхности ;  - ускорение свободного падения;  – среднее значение плотности;  – параметр Кориолиса;  – коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной вязкости, соответственно;  – вектор внешней нормали к боковой вертикальной границе области ;  – компоненты касательного напряжения трения ветра;  - оператор адвекции скалярной величины;  - оператор Лапласа по горизонтальным переменным . В присутствуют интегральные скорости:



а в принимается параметризация придонного трения следующего вида:



Для оценки порядка величин слагаемых в соотношениях модели - целесообразно перейти к безразмерным величинам. Рассмотрим уравнения - нашей системы, и определим характерные для озера Иссык-Куль масштабы, считая их независимыми:



Введем безразмерные переменные: , связав их с исходными размерными по формулам:



При этом масштабы  считаются зависимыми.

Переход к безразмерным переменным в системе уравнений - позволяет сделать вывод о том, что в масштабах, характерных для озера Иссык-Куль, можно отказаться от учета адвективного переноса и горизонтальной диффузии. При этом получается следующая система уравнений, записанная в безразмерных переменных:



В системе уравнений величины  - это числа Экмана для горизонтальной и вертикальной турбулентной вязкости:



а зависимые масштабы  имеют следующие значения:



Краевые условия в безразмерных переменных принимают следующий вид:



где  выражаются через компоненты вектора скорости ветра на поверхности водоема.

Краевые условия , записанные в безразмерных переменных, имеют вид:

 

Итак, примем следующие упрощающие предположения:

1. плотность – постоянная величина: ;
2. в уравнениях движения пренебрегаем адвективным переносом и горизонтальной диффузией.

С учетом указанных выше упрощений гидродинамическую модель - можно переписать в следующем виде (все величины считаем безразмерными, черточки над ними для простоты опущены):











Для полученной модели докажем единственность решения. Предположим, что задача - имеет два решения:  и . Используем представление вектора горизонтальной скорости в виде суммы баротропной  и бароклинной  составляющих (см. [1]):

, .

Для разности решений  и  задача для баротропной компоненты имеет вид:



Умножим первое уравнение на функцию , такую что

 при  

и полученное уравнение проинтегрируем по области  в том числе и по частям. В результате получим соотношение:



которое выполняется только при , что означает единственность баротропной компоненты.

Учитывая, что , для давления на невозмущенной поверхности  получаем следующие соотношения:



Выпишем задачу для бароклинной компоненты для разности решений. Она получается из задачи - с учетом того, что , и имеют место соотношения (20):



краевые условия:



начальные условия:



Первое уравнение умножим на функцию , а второе – на функцию , сложим получившиеся уравнения и результат проинтегрируем по переменной *z* от 0 до *H*, учитывая краевые условиям . В итоге получим уравнение

.

Так как второе слагаемое в является неотрицательным, то для первого слагаемого можем записать:

 где .

Из условия получаем . Так как функция  является убывающей (ее производная неположительная), неотрицательной и в начальный момент времени , то мы получаем, что . Последнее соотношения означает единственность бароклинной компоненты.

Задача для вертикальной компоненты имеет вид:

.

Данная задача имеет только тривиальное решение. Следовательно, вертикальная компонента определяется единственным образом.

Таким образом, доказана единственность решения для компонент скорости .

При дополнительных упрощениях задача - может быть решена аналитически. К пунктам 1 и 2 добавим условия:

1. в качестве основной области принимается бассейн прямоугольной формы, глубина которого постоянна и равна : ;
2. для параметра Кориолиса принимается линейная зависимость: ;
3. компоненты напряжения трения ветра  задаются при помощи аналитических формул, позволяющих моделировать различные типы ветров над акваторией бассейна; мы, в частности, будем рассматривать вариант:



где  – параметры, определяющие силу ветра.

Теперь задачу -, с учетом п.п. 3-5, можно использовать как тестовую для проверки работоспособности и анализа новых численных методов, если удастся найти достаточно богатое множество ее аналитических решений.

Некоторые классы аналитических решений тестовой задача - найдены в работе [4]. Горизонтальные компоненты вектора скорости найдены в виде сумм баротропной и бароклинной составляющих.

Зная горизонтальные компоненты скорости, вертикальная компонента скорости может быть определена, как решение задачи



ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г.И., Саркисян А.С. Математическое моделирование циркуляции океана. – Москва: Наука, 1988. – 302 с.
2. Ekman. V.W. On the influence of the Earth rotation on ocean currents // Arkiv Mat., Astron., or Fysik. – 1905. – Bd. 2. – № 11. – P. 1-52.
3. Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. – Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2001. -238 с.
4. Турдушев И.А., Скляр С.Н. Аналитические решения для трехмерной модели ветровых течений в водоеме / Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: Материалы второй международной юбилейной конференции, посвященной 20-летию образования Кыргызско-Российского Славянского Университета (КРСУ) им. первого президента Б.Н Ельцина и 100-летию профессора Якова Васильевича Быкова. Санаторий «Иссык-Куль Аврора»: 5-7 сентября 2013 года / Под общ. ред. проф. А.К. Керимбекова. – Бишкек: Изд-во Maxprint. Том 2. – 258 с.